

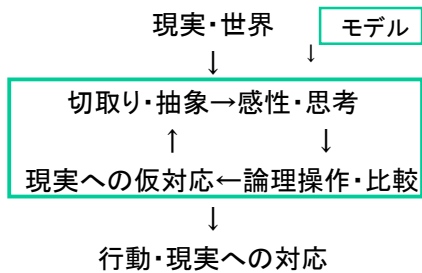
数学的リテラシーの視点から

2003PISAテストの結果について

PISAテストを解析するために

数学リテラシー構成における
「再現」・「関連づけ」・「熟考」とは？

現実・世界とモデル



例:ある日の大学・現実



解決すべき問題の提起

↓
現実の切り取り・言語化

状況・条件:遅刻してきたら
講義は始まっていた
問題:講義に参加すべきか?



言語から(メタ)数量へ

黒板・時計・先生の様子を見ると
講義は「半分」以上終わっている
今から入室しても得るモノは少ない
「得失の比較」
今回サボるとどうなるだろう・迷い

↓
ヤーメタ・現実行動

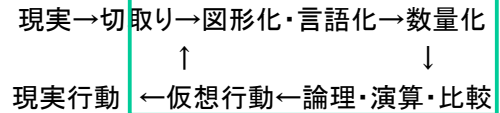
公式・等式・不等式へ

得るモノ・講義のおもしろさ = $3/5$
 講義の残り時間 = 半分 = $1/2$
 「もし出席したら」(仮想行動)
 恥ずかしさは遅刻時間に比例

$$\{3/5 \times 1/2\} < \{1/2\} \times \{恥ずかしさ\}$$

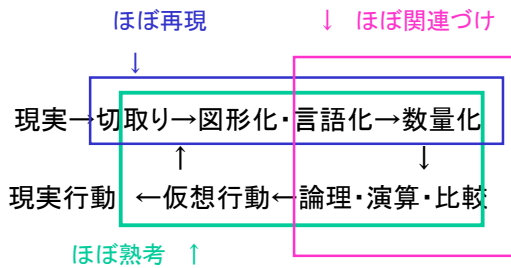
ならばサボる ← 計算可能

数理モデルをまとめると



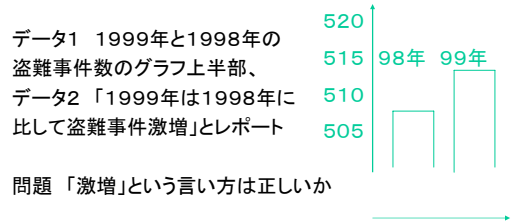
ここで、仮想行動とは、「もし、演算の結果こうなった、こう行動したとすれば、現実がこうなるはずだ、しかるに・・・」と考える「仮定の行動」のループのこと。現実と数理モデルを仮想行動が連結する。
 この部分の高度さ・複雑さが難易度に反映される

PISA数学テストと数理モデル



PISA数学問題の実際例1

盗難事件のレポート→グラフとその解釈



1: 現実からグラフ・モデルへ

データ1 1999年と1998年の盗難事件数のグラフの上半部

2: 推論に基づく仮想行動

データ2 「1999年は1998年に比べて盗難事件は激増」とレポート

盗難事件レポート問題の構成

現実の盗難事件数 → グラフ

↓
 仮想行動・激増レポート ← 下半部省略

↓
 問題: 現実を正しく反映するか

演算難度は低いが、仮想行動は数値化されておらず
 「もし、激増と言ったとしたら・・・」のようにかなり高度

PISA数学問題の実際例2

スケートボード(スケボー)の問題
→表から必要なデータを抽出し・条件に従って計算

前置き 既成スケボーの価格と各部品の値段表
問1 組み立て可能なオリジナルスケボーの最高・最低価格
問2 条件 それぞれ、3、2、2、1種類の、デッキ、車輪セット、金具セット、トラックを使う
問題 組み立て可能なスケボーの種類
問3 与えられた予算で組み立て可能な最高価格のスケボーの部品価格

スケートボード問題の構成

スケートボードの部品・価格表
↓
仮想行動・組み合わせ←合計価格
↓
数学的な条件を満たすか

例えば問3の仮想行動は、問2で聞いた12種類の組み合わせの価格→難度中等度

PISA数学問題の実際例3

サイコロの問題→展開図と現実の完成品との関係

前置き1 サイコロの向かい合った面の数の規則
前置き2 サイコロの展開図A, B, C, D

問題: 規則に従ったサイコロが出来るのはどれか

サイコロの問題の構成

現実のサイコロ → 展開図
↓
仮想行動・組み立て←目の数合計
↓
現実のサイコロか

本問題の要求する演算は加法であり、仮想行動は、展開図からの組み立て→比較的容易

仮想行動の比較と成績

サイコロの問題: 慣れている・単純
→成績: 非常に良い

スケートボード問題: かなり複雑
ただし数学化・モデル化されている
→成績: 問題あるものの良

盗難事件レポート問題: 複雑
慣れていない、数学化されていない
→成績: 不良

成績の国際比較1

盗難事件レポートの問題
日本正答率29.1 / 平均正答率29.5
(max45.8, min28.7)

当否は与えずに日常言語での解答を要求し、ほぼ完全な自由記述方式である。
仮想行動は「もし激増と言ったとしたら・・・グラフは(・・・)のようになっているはずだから、(・・・)だ」という文の(・・・)を求めることであり、非常に大きい

成績の国際比較2

スケートボードの問題

- 問1 日本正答率58.5 / 平均正答率72.0
(max85.2, min58.5)
誤答率 / 無答率26.9 / 10.6(ほぼ最大)
- 問2 日本正答率67.0 / 平均正答率45.5
(max67.0, min30.2)
- 問3 日本正答率78.3 / 平均正答率67.0
(max81.9, min46.7)

スケボー問題の解析と問題点

要求される演算は単純加算、仮想行動は、ただか問2で数え上げさせた12通り、これは日本の子供にとっては中等度の困難さのほゞ問2、問3の結果はそれを裏付けているが、

- 問1 オリジナルスケボーの最高・最低価格
結果 日本正答率58.5 / 平均正答率72.0
(max85.2, min58.5)
日本誤答率 / 無答率26.9 / 10.6(ほぼ最大)
- 購入した部品を既製のスケボーに取り付けた改造ボードをオリジナルボードと解釈した可能性もある

成績の国際比較3

サイコロの問題

- 日本正答率83.3 / 平均正答率63.2
(max83.3, min52.8)
- 本問題の要求する演算は加法であり、仮想行動は、展開図からの組み立てである。これに対しては「慣れ」も効くであろうから、高得点は予想できる

成績の国際比較まとめ

- 盗難レポートの問題: 日本/平均 → c/c
スケボーの問題: 日本/平均 → b+/b
サイコロの問題: 日本/平均 → a+/b+
- ↓
平均値は問題の難易度に対応
平均からのズレは、問題への慣れ・技能
- ↓
日本の場合、演算技術・能力完全OK
しかし仮想行動による現実対応には難

数学リテラシーテストから 見えること

言語的または日本の社会生活に由来すると考えられる低い得点を除くと、日本の子供は、現実をいったんモデル化・数式化しておけば、その世界での演算能力については十分な高さを持つが、日常生活との関係性の確立が十分ではないことが窺える。

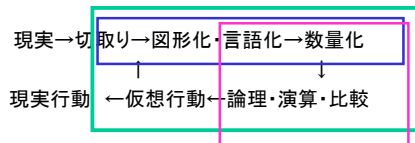
数学テストの結論を補強する 問題解決能力テスト

いわゆる演算技術・能力は(非常に)優秀
モデルにおける演算結果が現実の生活に戻されにくく、大きい仮想行動が要求される「逆問題(帰納的演算)」では「??」

- これは問題解決テストでの成績にも現れる:
- | | | |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| DESIGN問題
(日本a/平均b) | 旅行の問題
(日本b+/平均b) | 灌漑・水門の問題
(日本b/平均b) |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 類推能力 > | 演繹能力 > | 帰納能力 |
| | (順問題の解決能力) | (逆問題の解決方略) |

PISAを越えて1

下の構図は科目によらずほぼ一定
ただ、言語では演算過程が消え、科学では特別な
言語、特別な知識が要求される



PISAを越えて2

PISAテストは現実とモデルとの関係性を重視

数学テストでは

現実をまず言語化し、数値化・図形化してモデルを得る。
次いで現実との関係性を仮想行動によって確かめる。

これは科学・問題解決・読解力テストなどでも同じ。



共通部分をより強調・整理することが可能ではないか

PISAの示唆するもの

教育における現実との関係性の重要性
関係性指標としての仮想行動の明示化



指標構築における問題・能力分析の重要性
(PISAテストの言語依存性問題も?)